

一様な磁場を横切る電導性流体の管内振動流れ

平行平面絶縁壁間内流れ

大 木 守 松

工 学 部 機 械 工 学 科

1. 緒 言

一様な磁場を横切る電導性流体の管内流れの問題は、単に理論的な興味ばかりでなく、実用的な面での、直接発電・電磁ポンプ・電磁流量計等に応用出来る本質的な重要性をもっている。

電導性流体を磁気流体近似することによって、管内定常流れの問題については多くの研究がなされており、Hartmann⁽¹⁾を始めとして、Shercliff⁽²⁾、棚沢⁽³⁾、Tani⁽⁴⁾等がある。非定常流れの一例として、圧力勾配が時間的に変動する場合の管内流れの問題は、磁気流体の力学を理解する上に於て、重要な意味をもつものであり、この問題を取扱ったものとしては、管壁が完全導体の平行平面壁間内流れについての Yen & Chang⁽⁵⁾の研究がある。

原子炉の冷却等によって得られる高温高圧の電導性流体を用いて、直接発電を行う場合、流体を吹き流す方法と閉じこめた系で利用する方法とが考えられるが、圧力勾配の周期的変動にもなつて生じる電導性流体の管内振動流れは、後者の一モデルである。

本報告は、圧力勾配が周期的に変動する場合に、任意の強さの一様な外部磁場に垂直におかれた任意の一様断面をもつ直管内を振動する電導性流体の流れの基礎式を磁気流体の近似のもとに導入し、Yen & Chang が明確にしていない流れの振動の位相について明らかにしようと試みたものである。ここでは無限に広い平行な二枚の絶縁壁の間を振動する電導性流体の流れを考え、厳密解を求め、定性的な現象を明らかにする。

2. 記 号

$x, y, z,$: 直交座標軸
$X, Y, Z,$: 無次元直交座標軸
t	: 時間
τ	: 無次元時間
$\omega=2\pi n$: 角周波数
n	: 振動数
L	: 代表長さ
v_0	: 代表速さ

$\mathbf{V}(v_x, v_y, v_z)$: 速度
$\mathbf{B}(B_x, B_y, B_z)$: 磁束密度
$\mathbf{E}(E_x, E_y, E_z)$: 電場密度
$\mathbf{J}(J_x, J_y, J_z)$: 電流密度
p	: 圧力
ρ	: 流体の密度
ν	: 動粘性係数
σ	: 流体の電気伝導度
μ	: 流体の透磁率

$$H = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} B_0 L \quad : \text{Hartmann 数}$$

$$\lambda^2 = i R \ell = i \frac{\omega L^2}{\nu}$$

$$\nu_m = \frac{1}{\sigma\mu}$$

$$P_m = \chi^2 = \frac{\nu}{\nu_m}$$

$$\lambda_m^2 = i R_m = i \frac{\omega L^2}{\nu_m}$$

$$\epsilon = \frac{1-\chi}{1+\chi}$$

3. 基礎式

電気伝導性の相当良い流体を考え、変位電流を無視し、又流体がほぼ中性を保つとし、対流電流を伝導電流にくらべて無視すると、電磁場に関する式は、MKSA 有理化単位系を用いれば、

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.4)$$

\mathbf{E} 及び \mathbf{J} を消去すれば

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nu_m \nabla^2 \cdot \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) \quad (3.5)$$

なる誘導方程式が得られる。

一方、非圧縮性流体を仮定すれば、連続の式及び運動方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (3.6)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{p} + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3.7)$$

従って、 \mathbf{V} 及び \mathbf{B} に関する式 (3.5) 及び (3.7) を連立させて解を求めればよい。

先ず任意の強さの一様な磁場を垂直に横切る任意断面の直管内磁気流体振動流れの基

礎式を導入する。

外部磁場が y 方向に一様な磁束密度 \mathbf{B}_0 で与えられているとする。流れは x 方向に速度成分 v_x のみをもつとすれば、磁力線がひきずられて生じる誘起磁場は同じく x 成分 B_x のみと考えてよい。直管断面の直径にくらべて直管が非常に長いものであるとすれば、流れは層流状態に完全に発達していると考えられ、変量は y, z 及び t の関数とみなせる。

$$(3.4) \text{ 式より } B_y = B_0 \quad (3.8)$$

電流は (3.2) 及び (3.3) 式より

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \left(0, \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_x}{\partial z}, -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \\ \mathbf{J} &= (0, \sigma E_y, \sigma (E_z + B_0 v_x)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

誘導方程式 (3.5) は、

$$\left[\nu_m \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \right] B_x + B_0 \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (3.10)$$

運動方程式 (3.7) は、

$$\left[\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \right] v_x + \frac{B_0}{\rho \mu} \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.11.a)$$

$$-\frac{B_x}{\rho \mu} \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.11.b)$$

$$-\frac{B_x}{\rho \mu} \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (3.11.c)$$

(3.11.b) 及び (3.11.c) を積分し共に成立つ条件式として次式が得られる。

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2\rho\mu} B_x^2 + (x, t \text{ の関数})$$

即ち

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = (x, t \text{ の関数})$$

一方 (3.11.a) 式より $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ は (y, z, t) の関数であるから同時に満足するためには

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = (t \text{ の関数}) \quad (3.12)$$

でなければならない。

圧力勾配が周期的に変動する場合を考える。

$$\text{即ち } -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\nu_0}{L^2} P \exp(i\tau) \quad (3.13)$$

実部或いは虚部が物理的意味をもつ。

圧力勾配にともなって、速度・誘起場が変動すると仮定すれば、

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 u \exp(i\tau) \\ B_x &= \mu \sqrt{\sigma \rho \nu} v_0 h \exp(i\tau) \\ E_{y,z} &= v_0 B_0 E_{y,z} \exp(i\tau) \\ J_{y,z} &= \sigma v_0 B_0 j_{y,z} \exp(i\tau) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

圧力勾配が実部をとるときは夫々実部が、又虚部をとるときは夫々虚部が物理的意味をもつことになる。

ここで P は Poiseuille 数, $u \cdot h \cdot E_{y,z}$ 及び $j_{y,z}$ は夫々速度・誘起磁場・誘起電場

及び誘起電流の無次元変数である。

又無次元座標 X, Y, Z , 無次元時間 τ 及び定数 $H, \lambda^2, \lambda_m^2$ 及び χ^2 を下の如く定める。

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad Z = \frac{z}{L}, \quad \tau = \omega t. \\ H &= \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} B_0 L, \quad \lambda^2 = i R_e = i \frac{\omega L^2}{\nu}, \quad \lambda_m^2 = i R_m = i \frac{\omega L^2}{\nu_m}, \quad \chi^2 = \frac{\nu}{\nu_m} = P_m \end{aligned} \quad (3.15)$$

ここで H は Hartmann 数, R_e 及び R_m は振動流れについての Reynolds 数及び磁気 Reynolds 数に相当し, 又 P_m は磁気 Prandtl 数である。

運動方程式, 誘導方程式及び電場, 電流に関する式は次式となる。ここで

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad \text{とする。}$$

$$(\nabla_{\perp}^2 - \lambda^2) u + H \frac{\partial h}{\partial Y} + P = 0 \quad (3.16 \cdot a)$$

$$(\nabla_{\perp}^2 - \lambda_m^2) h + H \frac{\partial u}{\partial Y} = 0 \quad (3.16 \cdot b)$$

$$H E_Y = H j_Y = \frac{\partial h}{\partial Z} \quad (3.16 \cdot c)$$

$$H (E_Z + u) = H j_Z = - \frac{\partial h}{\partial Z} \quad (3.16 \cdot d)$$

$$-H \left(\frac{\partial E_Z}{\partial Y} - \frac{\partial E_Y}{\partial Z} \right) = \lambda_m^2 h \quad (3.16 \cdot e)$$

境界条件は

$$(i) \quad \text{流れは壁に附着する。} \quad u = 0 \quad (\text{壁上}) \quad (3.17 \cdot a)$$

$$(ii) \quad \text{壁が絶縁体の場合は, 壁内で電流が流れないこと, 及び時間に無関係で, 又外部磁場と境界で連続することから} \quad h = 0 \quad (\text{壁上}) \quad (3.17 \cdot b)$$

壁が完全導体の場合には, 壁が接地されている状態を考え, 電流の接線成分がないとして,

$$j_t = 0 \quad (\text{壁上}) \quad (3.17 \cdot c)$$

以上 (3.16) 及び (3.17) 式が電導性流体の, 一様な磁場を垂直に横切る任意断面直管内振動流れの基礎式である。

ここでは, 最も簡単な平行平面絶縁壁間内流れに関して, 上の基礎式をもとに解析する。

4. 平行平面絶縁壁間内流れの場合

4.1 解の誘導

u, h 等の変数は Y のみの函数となる。

平行平面壁が $Y = \pm 1$ にあるとする。基礎式より h 或いは u を消去すれば, 夫々 u 及び h に関する次式を得る。

$$\left(\frac{d^4}{dY^4} - 2l_1 \frac{d^2}{dY^2} + l_2^2 \right) u = \lambda^2 \chi^2 P \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{d^4}{dY^4} - 2l_1 \frac{d^2}{dY^2} + l_2^2 \right) h = 0$$

ここで $l_1 = H^2 + \lambda^2 (1 + \chi^2), \quad l_2 = \lambda^4 \chi^2$

u 及び h についての解は

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{P}{\lambda^2} + u_1 e^{my} + u_2 e^{-my} + u_3 e^{ny} + u_4 e^{-ny} \\ h &= h_1 e^{my} + h_2 e^{-my} + h_3 e^{ny} + h_4 e^{-ny} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

ここで u_k, h_k ($k=1, 2, 3, 4$) は定数, m, n は次の方程式の根である。

$$r^4 - 2l_1 r^2 + l_2^2 = 0$$

$$a^2 = H^2 + \lambda^2 (1 + \chi)^2, \quad b^2 = H^2 + \lambda^2 (1 - \chi)^2$$

$$\text{とおけば} \quad m = \frac{1}{2}(a+b), \quad n = \frac{1}{2}(a-b) \quad (4.3)$$

u_k 及び h_k の間には次の関係式が成立つ。

$$h_1 = -\frac{m^2 - \lambda^2}{mH} u_1, \quad h_2 = \frac{m^2 - \lambda^2}{mH} u_2 \quad (4.4)$$

$$h_3 = -\frac{n^2 - \lambda^2}{nH} u_3, \quad h_4 = \frac{n^2 - \lambda^2}{nH} u_4$$

境界条件は $Y = \pm 1$ のとき $u = h = 0$,

$$\text{従って} \quad u_1 = u_2 = -\frac{1}{2D} \frac{P}{\lambda^2} \frac{n^2 - \lambda^2}{n} \sinh n$$

$$u_3 = u_4 = \frac{1}{2D} \frac{P}{\lambda^2} \frac{m^2 - \lambda^2}{m} \sinh m$$

$$D = \frac{n^2 - \lambda^2}{n} \cosh m \sinh n - \frac{m^2 - \lambda^2}{m} \sinh m \cosh n$$

求むる解は

$$u = \frac{P}{\lambda^2} \left\{ 1 - \frac{(m - \chi n) \sinh n \cosh m Y + (\chi m - n) \sinh m \cosh n Y}{(m - \chi n) \sinh n \cosh m + (\chi m - n) \sinh m \cosh n} \right\}$$

$$h = \frac{PH}{\lambda^2} \cdot \frac{\sinh n \sinh m Y - \sinh m \sinh n Y}{(m - \chi n) \sinh n \cosh m + (\chi m - n) \sinh m \cosh n}$$

平均流速を $v_0 e^{i\tau}$ とすれば

$$v_0 e^{i\tau} = v_0 e^{i\tau} \frac{\int_{-1}^1 u dY}{\int_{-1}^1 dY}$$

$$\therefore 1 = \frac{P}{\lambda^2} \left\{ 1 - \frac{\frac{m^2 - \lambda^2}{\lambda^2} \sinh m \sinh n}{(m - \chi n) \sinh n \cosh m + (\chi m - n) \sinh m \cosh n} \right\}$$

Z 方向の電場 E_z は次のようにして定めることができる。振動流れの実験をする場合、 Z 軸方向に無限に広がった流れを考えるわけではなく、例えば $Z = \pm d$ に壁があるような長方形断面管を通る流れを考える。従って、もしも壁が絶縁体で、電流を通さないものであるとすれば、 $j_z = 0$ でなければならない。(3.16) 式からわかるように、流れの至る所で $j_z = 0$ を要求することはできないが、断面全体として、 Z 方向の電流がないようにすることは可能である。

$$\text{即ち} \quad \int_{-1}^1 j_z dY = \int_{-1}^1 (E_z + u) dY \equiv 0$$

$$\therefore E_0 e^{i\tau} = \frac{\int_{-1}^1 E_z dY}{\int_{-1}^1 dY} = -\frac{\int_{-1}^1 u dY}{\int_{-1}^1 dY} = -e^{i\tau}$$

従って平均誘起電場 E_0 は

$$E_0 = -1 = -\frac{P}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\frac{m^2 - n^2}{\lambda^2} \sinh m \sinh n}{(m - \chi n) \sinh n \cosh m + (\chi m - n) \sinh m \cosh n} \right)$$

局所的な誘起電流は, (3・16・d) 式より

$$j_z = -\frac{P}{\lambda^2} \cdot \frac{m \sinh n \cosh m Y - n \sinh m \cosh n Y}{(m - \chi n) \sinh n \cosh m + (\chi m - n) \sinh m \cosh n}$$

局所的な誘起電場は, 同じく (3・16・d) 式より

$$E_z = -\frac{P}{\lambda^2} \cdot \left(1 + \chi \cdot \frac{n \sinh n \cosh m Y - m \sinh m \cosh n Y}{(m - \chi n) \sinh n \cosh m + (\chi m - n) \sinh m \cosh n} \right)$$

以上により流れの速度, 誘起磁場, 平均流速, 平均誘起電場, 局所的な誘起電流及び誘起電場が求められた。

4・2 振巾及び位相

4・1 で得られた解は, そのままの形では流れの様相を明確に知ることができないので次の如く変形する。

$$\text{今} \quad a = \alpha_+ \exp\left(\frac{1}{2} i r_+ - 1\right) = \alpha_1 + i \beta_1$$

$$b = \alpha_- \exp\left(\frac{1}{2} i r_- \right) = \alpha_2 + i \beta_2$$

$$\alpha_{\pm} = \{H' + Re^2(1 \pm \chi)\}^{\frac{1}{2}} \quad r_{\pm} = T_{an}^{-1} \quad \frac{Re(1 \pm \chi)^{\frac{1}{2}}}{H^2} \quad (\text{複号同順})$$

$$\text{又} \quad A_1(Y) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)Y, \quad B_1(Y) = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) + \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)Y$$

$$A_2(Y) = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) - \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2)Y \quad B_2(Y) = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) - \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2)Y$$

$$A_3(Y) = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)Y \quad B_3(Y) = \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) + \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)Y$$

$$A_4(Y) = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_2) - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)Y \quad B_4(Y) = \frac{1}{2}(\beta_1 - \beta_2) - \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2)Y$$

$$p_k(Y) = \sinh A_k(Y) \cos B_k(Y), \quad q_k(Y) = \cosh A_k(Y) \sin B_k(Y)$$

$$r_k(Y) = \cosh A_k(Y) \cos B_k(Y), \quad s_k(Y) = \sinh A_k(Y) \sin B_k(Y)$$

(k=1, 2, 3, 4)

更に

$$W_R = \alpha_2 p_1(1) - \beta_2 q_1(1) - \epsilon(\alpha_1 p_2(1) - \beta_1 q_2(1))$$

$$W_I = \beta_2 p_1(1) + \alpha_2 q_1(1) - \epsilon(\beta_1 p_2(1) + \alpha_1 q_2(1))$$

$$W_{uR}(Y) = \frac{1}{2} \left\{ \alpha_2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) - \beta_2(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \right. \\ \left. - \epsilon \{ \alpha_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) - \beta_1(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) \} \right\}$$

$$W_{uI}(Y) = \frac{1}{2} \left\{ \alpha_2(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) + \beta_2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \right. \\ \left. - \epsilon \{ \alpha_1(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) + \beta_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \} \right\}$$

$$W_{hR}(Y) = r_3 + r_4 - r_1 + r_2$$

$$W_{hI}(Y) = s_3 + s_4 - s_1 + s_2$$

$$\begin{aligned}
 W_{mR}(Y) &= \frac{1}{Re(1+\chi)} \left[(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) (r_1(0) - r_2(0)) + (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) (s_1(0) - s_2(0)) \right] \\
 W_{mI}(Y) &= \frac{1}{Re(1+\chi)} \left[(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) (s_1(0) - s_2(0)) - (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) (r_1(0) - r_2(0)) \right] \\
 W_{jR}(Y) &= \frac{1}{2} \left[\alpha_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) - \alpha_2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \right. \\
 &\quad \left. - \beta_1(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) + \beta_2(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \right] \\
 W_{jI}(Y) &= \frac{1}{2} \left[\alpha_1(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) - \alpha_2(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \right. \\
 &\quad \left. + \beta_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) - \beta_2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \right] \\
 W_{eR}(Y) &= \frac{\chi}{2(1+\chi)} \left[\alpha_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) + \alpha_2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \right. \\
 &\quad \left. - \beta_1(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) - \beta_2(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \right] \\
 W_{eI}(Y) &= \frac{\chi}{2(1+\chi)} \left[\alpha_1(q_1 + q_2 - q_3 - q_4) + \alpha_2(q_1 + q_2 + q_3 + q_4) \right. \\
 &\quad \left. + \beta_1(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) + \beta_2(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \right]
 \end{aligned}$$

とおけば

$$\frac{u}{P} = \frac{1}{Re} \sqrt{\frac{(W_R - W_{uR})^2 + (W_I - W_{uI})^2}{W_R^2 + W_I^2}} e^{-i\theta_u} \quad (4.21)$$

$$\theta_u = \tan^{-1} \frac{W_R(W_R - W_{uR}) + W_I(W_I - W_{uI})}{W_I W_{uR} - W_R W_{uI}} \quad (4.2.2)$$

$$\frac{h}{P} = \frac{H}{Re(1+x)} \sqrt{\frac{W_{hR}^2 + W_{hI}^2}{W_R^2 + W_I^2}} e^{-i\theta_h} \quad (4.2.3)$$

$$\theta_h = \tan^{-1} \frac{W_R \cdot W_{hR} + W_I \cdot W_{hI}}{W_R \cdot W_{hI} - W_I \cdot W_{hR}} \quad (4.2.4)$$

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{Re} \sqrt{\frac{(W_R - W_{mR})^2 + (W_I - W_{mI})^2}{W_R^2 + W_I^2}} e^{-i\theta_m} \quad (4.2.5)$$

$$\theta_m = \tan^{-1} \frac{W_R(W_R - W_{mR}) + W_I(W_I - W_{mI})}{W_I W_{mR} - W_R W_{mI}} \quad (4.2.6)$$

$$\frac{E'_0}{P} = -\frac{1}{P} \quad (4.2.7)$$

$$\frac{j_z}{P} = \frac{1}{Re(1+\chi)} \cdot \sqrt{\frac{W_{jR}^2 + W_{jI}^2}{W_R^2 + W_I^2}} e^{-i\theta_{jz}} \quad (4.2.8)$$

$$\theta_{jz} = \tan^{-1} \frac{W_{jR} W_R + W_{jI} W_I}{W_{jI} W_R - W_{jR} W_I} \quad (4.2.9)$$

$$\frac{E_z}{P} = -\frac{1}{Re} \sqrt{\frac{(W_R - W_{eR})^2 + (W_I - W_{eI})^2}{W_R^2 + W_I^2}} e^{-i\theta_{EZ}} \quad (4.2.10)$$

$$\theta_{EZ} = \tan^{-1} \frac{W_R(W_R - W_{eR}) + W_I(W_I - W_{eI})}{W_I \cdot W_{eR} - W_R \cdot W_{eI}} \quad (4.2.11)$$

従って速度，誘起磁場，平均流速，平均誘起電場，誘起電流及び誘起電場は，圧力勾配の振動の位相にくらべて，夫々， θ_u ， θ_h ， θ_m ， θ_{jz} 及び θ_{EZ} 振動の位相かざれることが示された。

4.3 非常にゆっくりした振動の場合

振動数 n , 従って ω が小さいゆっくりした振動の場合は, λ^2 が非常に小さい。得られた解を λ^2 について巾級数に展開し, 高次の λ^2 を省略すれば非常にゆっくりした振動流れの様相が説明できる。

$$m \sim H + \frac{1+\chi^2}{2H} \lambda^2, \quad n \sim \frac{\chi}{H} \lambda^2$$

$$\frac{u}{P} \sim \frac{\cosh H - \cosh HY}{H \sinh H} + \left\{ \left(\frac{1-3\chi^2}{2H^2} - \frac{3+\chi^2}{2H} \coth H \right) \frac{\cosh H - \cosh HY}{H \sinh H} + \right. \\ \left. + \frac{1+\chi^2}{2H^2} \left(1 - Y \frac{\sinh HY}{\sinh H} \right) \right\} R_e e^{\frac{\pi}{2} i} \quad (4.3.1)$$

$$\frac{h}{P} \sim \frac{1}{H^2} \left(\frac{\sinh HY}{\sinh H} - Y \right) - \left\{ \frac{1+\chi^2}{2H} \cdot Y \cdot \frac{\cosh H - \cosh HY}{H \sinh H} - \right. \\ \left. - \left(\frac{3+\chi^2}{2H} \coth H + \frac{\chi^2}{H^2} \right) \frac{1}{H^2} \left(\frac{\sinh HY}{\sinh H} - Y \right) \right\} R_e e^{\frac{\pi}{2} i} \quad (4.3.2)$$

$$\frac{1}{P} \sim \frac{1}{H} \left(\coth H - \frac{1}{H} \right) + \left\{ \frac{1+\chi^2}{2H^2} + \frac{3\chi^2-3}{2H^2} \cdot \frac{1}{H} \left(\coth H - \frac{1}{H} \right) - \right. \\ \left. - \frac{3+\chi^2}{2} \left\{ \frac{1}{H} \left(\coth H - \frac{1}{H} \right) \right\}^2 \right\} R_e e^{\frac{\pi}{2} i} \quad (4.3.3)$$

$$\frac{j_z}{P} \sim \frac{1}{H} \left(\frac{1}{H} - \frac{\cosh HY}{\sinh H} \right) - \left\{ \frac{1}{2H} \left\{ (3+\chi^2) \coth H - \frac{1-\chi^2}{H} \right\} \cdot \frac{1}{H} \left(\frac{1}{H} - \frac{\cosh HY}{\sinh H} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1+\chi^2}{2H^2} \left(\frac{1}{H} - \coth H + HY \frac{\sinh HY}{\sinh H} \right) \right\} R_e e^{\frac{\pi}{2} i}$$

$$\frac{E_z}{P} \sim -\frac{1}{H} \left(\coth H - \frac{1}{H} \right) - \left\{ \frac{1}{2H} \left\{ (3+\chi^2) \coth H - \frac{1-\chi^2}{H} \right\} \cdot \frac{1}{H} \left(\coth H - \frac{1}{H} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1+\chi^2}{2H^2} \left\{ \frac{1}{H^2} + \chi(1+\chi^2) \right\} + \frac{\chi^2}{2H^2} (1-Y^2) - \right. \\ \left. - \frac{1+3\chi^2}{2H^2} \coth H + \frac{\chi^2}{H^2} \frac{\cosh HY}{\sinh H} \right\} R_e e^{\frac{\pi}{2} i} \quad (4.3.4)$$

これらの解は, 各瞬間に於て二次元定常流れの解と一致し, 各變量の振動の位相が圧力勾配の振動の位相と一致している項と, 振動流れに対する磁場の効果としての位相が圧力勾配の位相より $\frac{\pi}{2}$ 進んでいる項とよりなっている。勿論定常流れの極限に於ては, 夫々二次元定常流れの Hartmann の解^{(1), (6)} に一致する。

4.4 非常にはやい振動の場合

振動数が非常に大きく, 従って Re が H^2 にくらべて大きな値をもつ場合は, 得られた解を H について巾級数に展開し, H の高次の項を省略することにより, 振動の様相を知ることができる。

$$\frac{u}{P} \sim \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{\cosh \lambda Y}{\cosh \lambda} \right) + f_u \cdot H^2$$

$$f_u = \frac{1}{\lambda^2 (1-\chi^2)} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\cosh \lambda Y}{\cosh \lambda} \right) \tanh \lambda - \frac{1}{2} Y \frac{\sinh \lambda Y}{\cosh \lambda} \right\} + \\ + \frac{1}{\lambda^2 (1-\chi^2)^2} \left\{ \chi \tanh \lambda \left(\coth \lambda \chi - \frac{\cosh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda} \right) - \right.$$

$$-\coth \lambda \chi \left(1 - \frac{\cosh \lambda Y}{\cosh \lambda} \right) \} \quad (4.4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{P} &\sim \frac{H}{\lambda^3 (1-\chi^2)} \left(\frac{\sinh \lambda Y}{\cosh \lambda} - \tanh \lambda \cdot \frac{\sinh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} \right) - f_h \cdot H^2 \\ f_h &= \frac{1}{2\lambda^4 (1-\chi^2)^2} \left\{ \tanh \lambda \cdot \frac{\sinh \lambda Y}{\cosh \lambda} - Y \frac{\cosh \lambda Y}{\cosh \lambda} + \right. \\ &\quad + (1 - \tanh^2 \lambda + \chi \tanh \lambda \cdot \coth \lambda \chi) \frac{\sinh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} - \chi Y \tanh \lambda \cdot \frac{\cosh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} \Big\} + \\ &\quad + \frac{1 + \chi^2 + 2\chi \tanh \lambda \cdot \coth \lambda}{2\lambda^6 (1-\chi^2)^3} \left(\frac{\sinh \lambda Y}{\cosh \lambda} - \tanh \lambda \cdot \frac{\sinh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} \right) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} &\sim \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\lambda} \tanh \lambda \right) + f_m \cdot H^2 \\ f_m &= \frac{\tanh \lambda}{\lambda^3 (1-\chi^2)} - \frac{1}{\lambda^4} \left\{ \frac{1 + \tanh^2 \lambda}{2(1-\chi^2)} + \frac{(1 - \chi \tanh \lambda) \coth \lambda \chi}{(1-\chi^2)^2} \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^6} \left\{ \frac{\tanh \lambda}{2(1-\chi^2)} - \frac{(1 - \coth \lambda \chi) \tanh \lambda}{(1-\chi^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{j_z}{P} &\sim -\frac{1}{\lambda^2 (1-\chi^2)} \left(\frac{\cosh \lambda Y}{\cosh \lambda} - \chi \tanh \lambda \cdot \frac{\cosh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} \right) + f_j \cdot H^2 \\ f_j &= \frac{1}{2\lambda^3 (1-\chi^2)^2} \left\{ \tanh \lambda \cdot \frac{\cosh \lambda Y}{\cosh \lambda} + \chi (1 - \tanh^2 \lambda + \chi \cot h \lambda \chi \cdot \tan h \lambda) \frac{\cosh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} - \right. \\ &\quad - Y \left(\frac{\sinh \lambda Y}{\cosh \lambda} + \chi^2 \tanh \lambda \cdot \frac{\sinh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} \right) \Big\} - \frac{1}{2\lambda^4 (1-\chi^2)^3} \left\{ 2\chi \tanh \lambda \cdot \frac{\cosh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} - \right. \\ &\quad - (\chi^2 + 2\chi \tanh \lambda \cot h \lambda \chi) \left(\frac{\cosh \lambda Y}{\cosh \lambda} - \chi \tan h \lambda \cdot \frac{\cosh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} \right) \Big\} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_z}{P} &\sim -\frac{1}{\lambda^2} \left\{ 1 - \frac{\chi}{1-\chi^2} \left(\tanh \lambda \cdot \frac{\cosh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} - \chi \frac{\cosh \lambda Y}{\cosh \lambda} \right) \right\} + f_E \cdot H^2 \\ f_E &= \frac{\chi}{2\lambda^3 (1-\chi^2)^2} \left\{ \chi \tanh \lambda \cdot \frac{\cosh \lambda Y}{\cosh \lambda} + (\operatorname{sech}^2 \lambda + \chi \tanh \lambda \cdot \coth \lambda \chi) \frac{\cosh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} - \right. \\ &\quad - \chi Y \left(\tanh \lambda \cdot \frac{\sinh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} + \frac{\sinh \lambda Y}{\cosh \lambda} \right) \Big\} + \\ &\quad + \frac{\chi^2}{\lambda^4 (1-\chi^2)^3} \left\{ (1 + \chi \tanh \lambda \coth \lambda \chi) \frac{\cosh \lambda Y}{\cosh \lambda} - \right. \\ &\quad - (\chi + \tanh \lambda \coth \lambda \chi) \tanh \lambda \cdot \frac{\cosh \lambda \chi Y}{\sinh \lambda \chi} \Big\} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Re が非常に大きいことを考慮し、上式を変形すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad \xi &= \exp \left\{ -\sqrt{\frac{Re}{2}} (1 - |Y|) \right\} \cdot \exp \left\{ -i \sqrt{\frac{Re}{2}} (1 - |Y|) \right\} \\ \eta &= \exp \left\{ -\sqrt{\frac{Re}{2}} \chi (1 - |Y|) \right\} \cdot \exp \left\{ -i \sqrt{\frac{Re}{2}} \chi (1 - |Y|) \right\} \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

とおく。

$$\begin{aligned} \frac{u}{P} &\sim \frac{1}{Re} (1 - \xi) e^{-\frac{1}{2}i} + \\ &\quad + H^2 \left[\frac{1}{Re^{\frac{3}{2}} (1-\chi^2)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} (1 + |Y|) \xi \right\} e^{-\frac{3}{4}i} + \frac{1 - \xi}{Re^2 (1 + \chi) (1 - \chi^2)} \right] \quad (4.4.7) \\ \frac{h}{P} &\sim \mp \frac{H}{Re^{\frac{3}{2}} (1-\chi^2)} (\eta - \xi) e^{-\frac{3}{4}i} \pm \end{aligned}$$

$$\pm H^3 \left\{ \frac{(1-|Y|)(\xi+\chi\eta)}{2Re^2(1-\chi^2)^2} - \frac{(\eta-\xi)}{2Re^{\frac{3}{2}}(1+\chi)(1-\chi)^2} e^{-\frac{\pi}{4}i} \right\} \quad (4.4.8)$$

(複号は Y の正負と同順)

$$\begin{aligned} \frac{1}{P} \sim & \frac{1}{Re} e^{-\frac{\pi}{2}i} - \frac{1}{Re^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{3}{4}\pi i} + \\ & + H^2 \left\{ \frac{1}{Re^{\frac{3}{2}}(1-\chi^2)} e^{-\frac{3}{4}\pi i} + \frac{1}{Re^2} \frac{\chi+2}{(1-\chi)(1+\chi)^2} - \frac{1}{2Re^{\frac{3}{2}}(1-\chi^2)} e^{-\frac{\pi}{4}i} \right\} \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{j_z}{P} \sim & -\frac{\xi-\chi\eta}{Re(1-\chi^2)} e^{-\frac{\pi}{2}i} + \\ & + H^2 \left\{ \frac{(1-|Y|)(\xi+\chi^2\eta)}{2Re^{\frac{3}{2}}(1-\chi^2)^2} e^{-\frac{3}{4}\pi i} - \frac{\chi(\chi+2)\xi-\chi(\chi^2+2\chi+2)\eta}{2Re^2(1-\chi^2)^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_z}{P} \sim & -\frac{1}{Re} \left\{ 1 - \frac{\chi}{1-\chi^2} (\eta-\chi\xi) \right\} e^{-\frac{\pi}{2}i} + \\ & + H^2 \left\{ \frac{\chi^2(1-|Y|)(\xi+\eta)}{2Re^{\frac{3}{2}}(1-\chi^2)^2} e^{-\frac{3}{4}\pi i} - \frac{\chi^2(\xi-\eta)}{Re^2(1-\chi)^2(1+\chi)^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

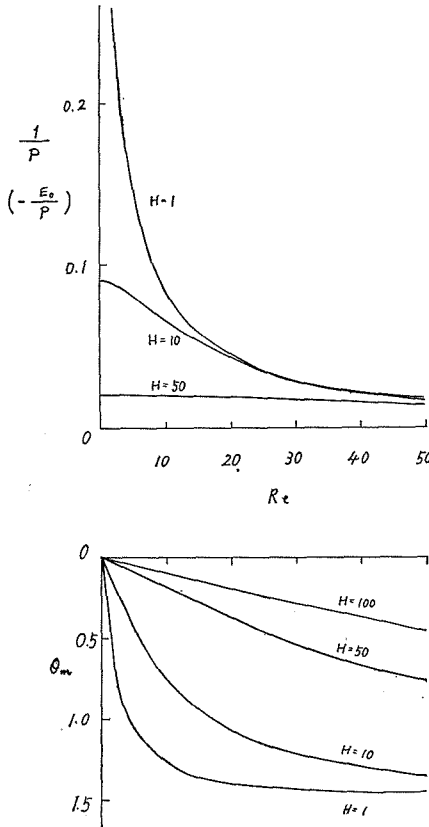
式 (4.4.7), (4.4.9) 及び (4.4.11) より速度分布, 平均速度及び誘起電場は, 約 $\frac{\pi}{2}$ の位相のおくれをもって振動するといえる。誘起磁場及び誘起電流は, (4.4.8) 及び (4.4.10) 式において第1項が ξ 及び η を含んでいる故, 振動の位相が Re 及び χ によって進んだり, おくれたりし定まらない。

磁場が作用していない場合は, 速度分布のみが解として残り, 粘性流体二平面壁間内振動流れの解⁽⁷⁾と一致する。従って, Richardson & Tyler⁽⁸⁾が実験的に, 又理論的には, Sexl⁽⁹⁾によって説明されている非常にはよい振動流れの環状効果に関する磁気流体力学的効果を含んだ, 一般化された解が得られたことになる。又解から, 磁気流体力学的効果として, 振動の位相のおくれがさまたげられること, 環状効果が弱められることが指摘できる。速度分布は, Sexlが明らかにした如く, 振幅の最大値が壁側に2つ軸対称的に生じ, 又誘起磁場は, 振幅の最小値・最大値が原点を中心として点対称的に, 壁に非常に近い所に現われることが示される。

5. 数値計算例

平均流速及び平均誘起磁場と Re との関係を, H を媒介定数として表わしたものが第1図である。 H が大きくなると振動の位相のおくれが著しくさまたげられることが明白である。 H が大きな値であっても, Re が大きければ, 位相のおくれは $\frac{\pi}{2}$ に近づいていくことが示されている。

磁気 Prandtl 数 $P_m = \chi^2$ は, 粘性境界層及び磁気境界層の厚さの比の二乗と考えることができるが, 振動流れにおける平均流速及び平均誘起電場との間に如何なる関係があるかを示したのが第2図である。 H が小さい場合には, 平均流起(平均誘起電場)の振幅及び位相にはあまり大きな影響を与えないが, H 及び Re が大きくなると, $\chi \sim 0.1$ より大きい場合には, 振幅及び位相の大きさが, ある一定値から変り始め, $\chi \sim 1$ より大きい場合には, 急激な変動が, 振動の位相の値に生じる。しかし H 及び Re が共に大きい場合



第1図 H を変えた場合の平均速度(平均誘起電場)及びその振動の位相と Re との関係

は、振動の位相がほぼ $\frac{\pi}{2}$ おくれることが示されている。

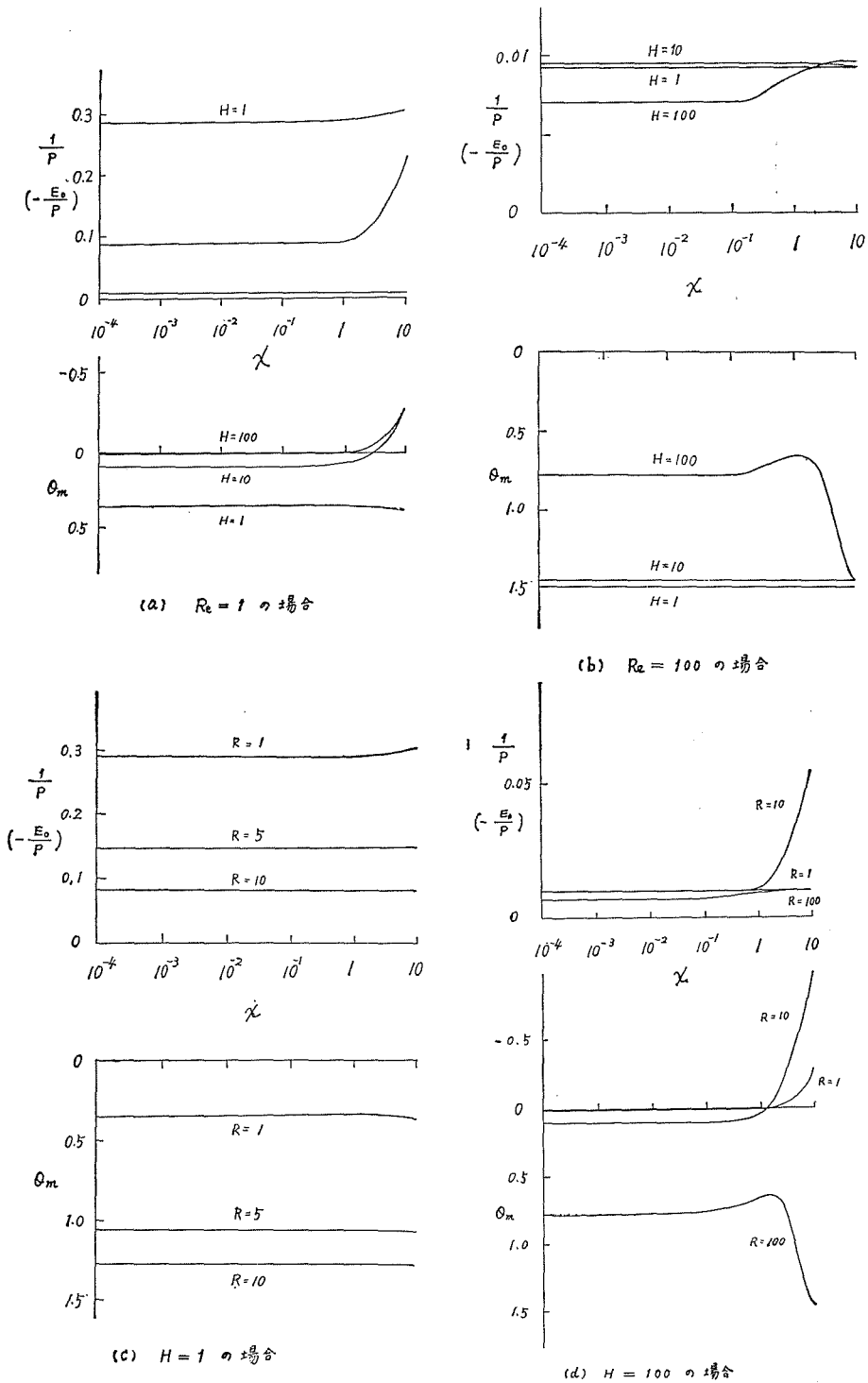
非常におそい振動及び非常にはやい、環状効果の現われる振動の例として、 $Re=1$ 及び $Re=250$ ($\chi=10^{-4}$) の場合の速度及び誘起磁場の絶対値及び振動の位相の大きさを第3図に示した。 Re の小さい場合は振動のおくれは小さい。誘起磁場の振動の位相は、 H が大きくなると一度大きくなり、次いで小さくなっていくことが示されている。 Re が大きい場合は、 H が小さい値では $H=0$ なる粘性流体の場合の分布と殆ど同じである。速度分布は、 H が大きくなると、振幅は壁から離れた所ではその大きさが殆ど等しく、壁近くで境界層の様相を示すことは定常流の場合と同じである。又 H が大きくなると、位相はおくれがさまたげられることがわかる。誘起磁場の絶対値の最大は、振動していない場合、 $H=1$ では $Y \approx 0.6$ であるが、 $Re=250$ では $Y \approx 0.85$ にずれている。 H が小さい場合誘起磁場の位相は進むが H が大きくなるとおくれることは興味ある点である。

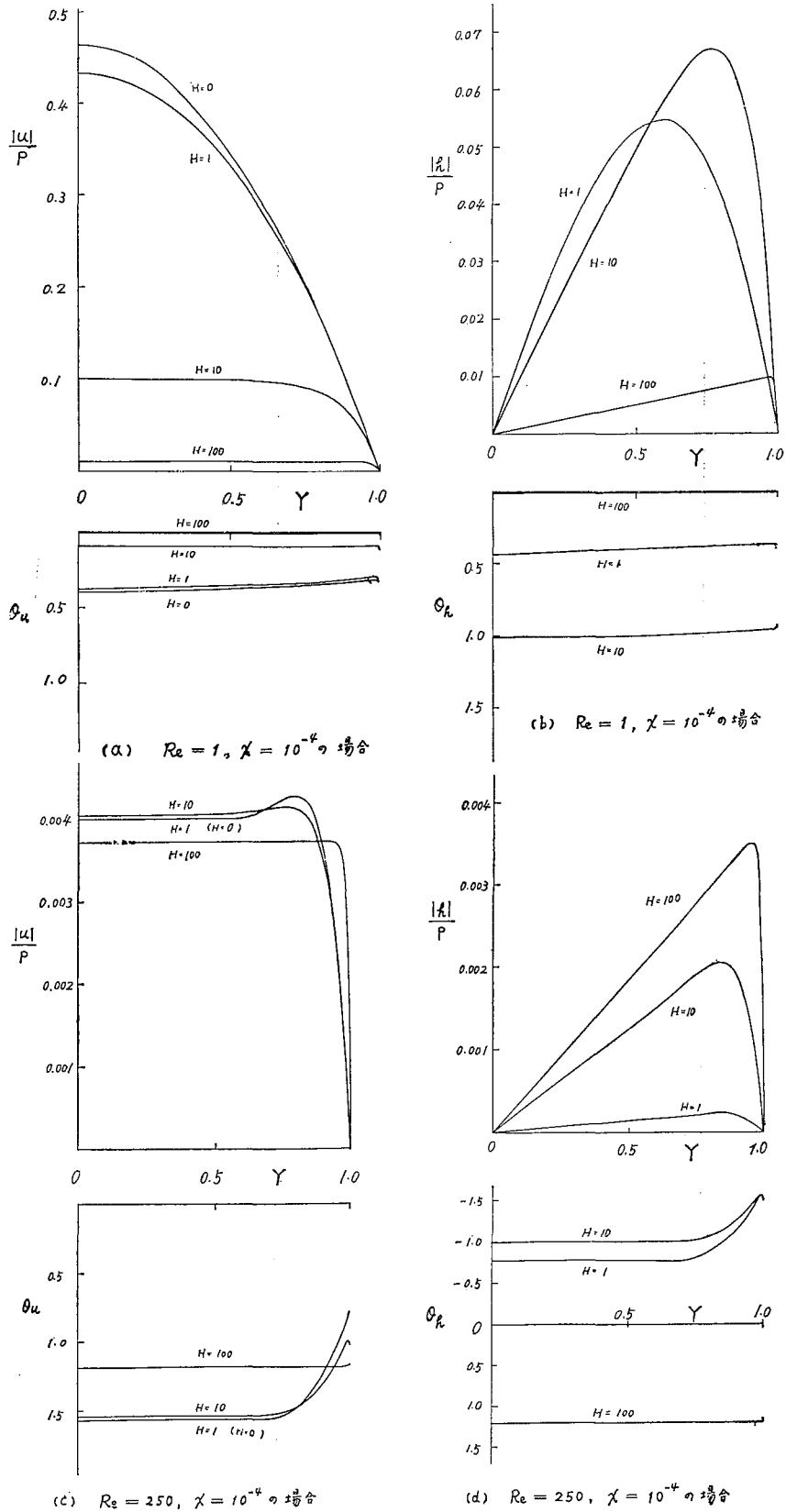
第4図は速度及び誘起磁場の、圧力勾配が $P \cdot \cos \tau$ で変動している場合の、 $\tau=0$ 及び $\tau=\frac{\pi}{2}$ における分布である。 Re が大きい場合に速度分布の位相が約 $\frac{\pi}{2}$ ずれ

ることが明白である。又磁気流体力学的効果として良く知られている速度分布の平坦化が振動流れにも存在し、 $H=100$ の場合、環状効果が現われていない事は興味ある点である。

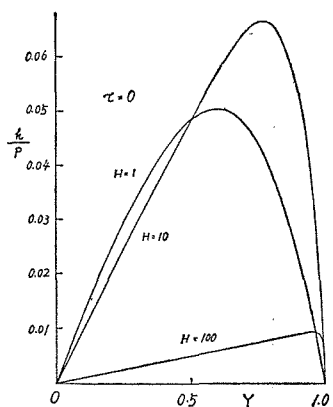
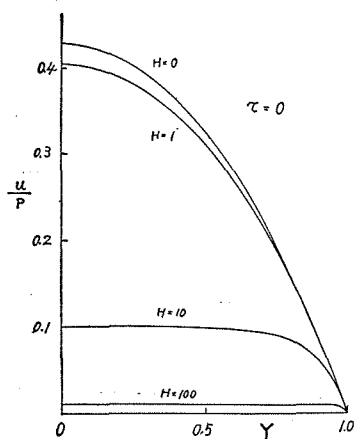
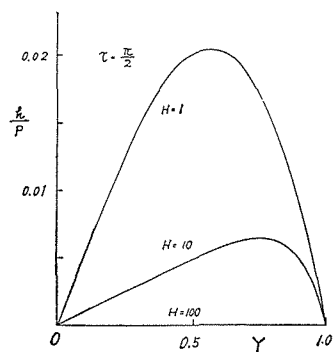
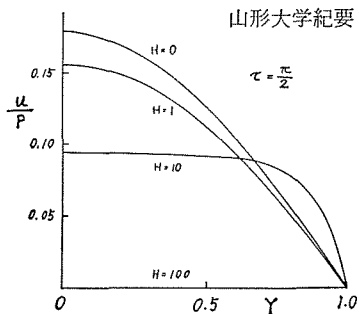
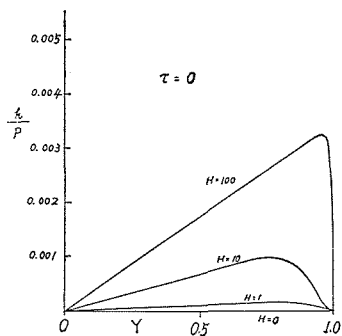
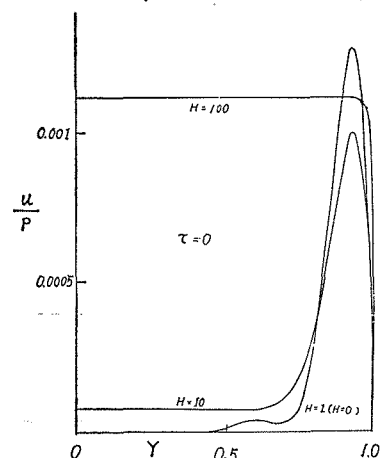
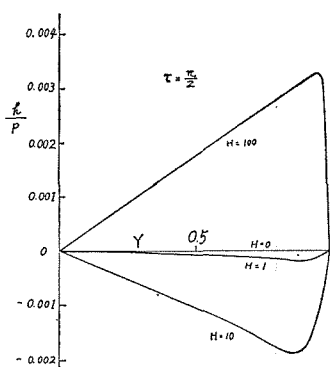
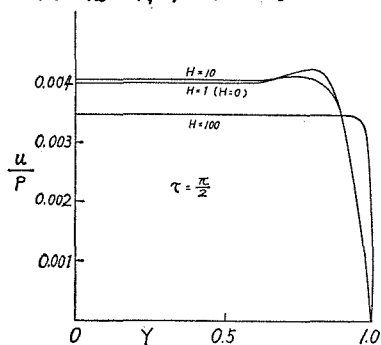
6. 結 言

本報告は、周期的に変動する圧力勾配にもなって生じる電導性流体の直管内振動流れを、直管が非常に長く、完全に層流が保されていると仮定して考察したものである。ここでは最も簡単な平行二平面絶縁壁間内流れを理論的に解析し、解は、圧力勾配の振動の位相と、流体の速度及び誘起場の振動の位相との間には、一般にずれが存在すること、又、圧力勾配がゆっくり変動する場合には、各変量が圧力勾配の位相とほぼ一致して振動し、一方非常にはやく振動する場合には、速度の位相は、粘性流体の場合に得られている結果

第2図 平均流速（平均誘起電場）及びその振動の位相と x との関係



第3図 速度及び誘起磁場の絶対値及びそれらの振動の位相分布

(a) $Re = 1, \alpha = 10^{-4}$ の場合(b) $Re = 1, \alpha = 10^{-4}$ の場合(c) $Re = 250, \alpha = 10^{-4}$ の場合(d) $Re = 250, \alpha = 10^{-4}$ の場合

第4図 速度及び誘起磁場分布

と同じく、壁から離れた所では約 $\frac{\pi}{2}$ おくれ、振幅の最大値が壁側に二つ、対称的に生じる Richardson & Tyler の環状効果の一般化されたものであることを示した。ここで得られた解は、磁場の作用していない場合の極限に於て、良く知られている粘性流体管内振動流れの解と一致し、又振動数を零とした極限に於て、定常状態の電導性流体管内流れの解と一致することが示され、得られた解が、一般化された解であることを明らかにした。

終りに、本研究に対し、終始懇切なる御指導・御鞭撻を賜りました元東北大学教授・故菊池寿工學博士に厚く感謝の意を表します。

文 献

- (1) J. Hartmann: Kgl. Danske. Vidensk. Selskab. Mat.-fys. Medd, 15, no. 6 (1937)
- (2) J.A. Shercliff: Proc. Camb. Phil. Soc., 47, 136 (1953)
- (3) 棚沢一郎：機論集, 27-183, 1692 (昭36)
- (4) I. Tani: J. Aero/Space Sci., 29, 297 (1962)
- (5) J.Yen & C. Chang: Phys. Fluids, 4, 1355 (1961)
- (6) 今井・桜井：電磁流体力學, 岩波物理学講座, 32頁
- (7) H. Schlichting: Grenzschicht-Theorie, Verlag G. Braun. 409 (1964)
- (8) E.G. Richardson & E. Tyler: Proc. Phys. Soc. London, 42, 1 (1929)
- (9) T. Sexl: Z. Physik, 61, 349 (1930)

The Oscillating Flow of Conducting Fluids in Pipes under Uniform Transverse Magnetic Fields

Part 1. Plane-Parallel Non-Conducting Walls

Morimatsu OHKI

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering

The study on the oscillating flow of electrically conducting fluids is not only essential in the field of magnetohydrodynamics, but also has various interesting applications for the engineering point of view.

In this paper the author improved and developed theoretically the problems on the flow of electrically conducting fluids through pipes under the uniform transverse magnetic fields and the influence of periodic pressure gradient, and obtained the exact solutions for the case of plane-parallel channels which have non-conducting walls. These are the generalized solutions containing the limiting cases of the oscillating flow of viscous fluids ($H \rightarrow 0$), and of the steady flow of conducting fluids ($\lambda \rightarrow 0$).

Under the very slowly oscillating pressure gradient, the velocity and the induced fields oscillate with the same phase as the pressure gradient has, and amplitudes are approximately equal to those for the steady flow of conducting fluids. On the other hand, under the very quickly oscillating pressure gradient, the velocity and the induced fields have the generalized annular effects of Richardson and Tyler.

山形大学紀要（工学）第9巻第2号 正誤表

頁	行	誤	正
22	下から6行目	$F = \frac{\pi}{4} GR^4 \theta^3$	$F = \frac{\pi}{4} GR^4 \theta^3$
" 31~41	見出し	(Ⅲ)	式の次に(1)と入れる (Ⅱ)
72	下から7行目	$\nabla^2 \cdot B$	$\nabla^2 B$
73	上から5行目	函 数	関 数
76	上から11行目	$\left(\frac{1}{2}ir_+ - 1\right)$	$\left(\frac{1}{2}ir_+\right)$
"	上から13行目	$r_{\pm} = \tan^{-1}$	$r_{\pm} = \tan^{-1}$
77	上から12行目	$(4 \cdot 21)$	$(4 \cdot 2 \cdot 1)$
"	下から7行目	$e^{-i\theta} j_z$	$e^{-i\theta} j_z$
"	下から5行目	$e^{-i\theta} \theta_{EZ}$	$e^{-i\theta} E_z$
"	下から2行目	θ_{j_z} 及び θ_{Ez}	θ_{j_z} 及び θ_{Ez}
"	"	の位相が	の位相が
82	下から1行目	の位相と x との	の位相と χ との
94	上から9行目	$\xi > \bar{\xi}$	$\xi > \bar{\xi}$
101	第20図	R_2	R_{a2}
"	下から17行目	$\sqrt{R_a^2 - R_q^2}$	$\sqrt{R_a^2 - K_q^2}$
"	下から16行目	$\sqrt{(R_q + \delta)^2 - R_q^2}$	$\sqrt{(R_q + \delta)^2 - R_q^2}$
"	下から15行目	R_q	R_q
105	下から12行目	低	位
"	下から5行目	$l \sin x$	$l \sin \alpha$
106	上から5行目	D_q	D_q
118	第3図 第4図		タテジク Rolling Force Pkg/mm 横ジク H _R B
130	上から13行目	不鮮明	[B] C ₁ の
"	上から14行目	"	磁心 C ₁ が点
"	下から2行目	"	$\int_{\frac{\pi+\theta_1}{w}}^{\frac{2\pi}{w}}$
131 153~161	下から13行目 見出し	" 近野:	V _{D1} , r _{D1} 近野・富川・高野:
153	下から13行目	$\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{w_1^2} - \frac{1}{w_2^2}\right) + \right.$	$\sqrt{\left\{\left(\frac{1}{w_1^2} - \frac{1}{w_2^2}\right) + \right.$
155	下から1行目 (注)	$\left. \frac{1}{L_2} \left(\frac{w_1}{w_2}\right) \right\}$	$\frac{1}{L_2} \left(\frac{w_1}{w_2}\right) \Bigg\}^2$
157	上から2行目	らの側定を	らの測定を
167	下から11行目	Sc= の式	(13)
"	下から10行目	Sc= の式	(14)
169	下から1行目	$\frac{w^2 - w_f^{20}}{w^2 - w_f^{2\infty}}$	$\frac{w - w_{f0}}{w^2 - w_{f\infty}^2}$
190	下から5行目	Ou	OV
199	上から2行目	Frectional	Fractional
207	下から8行目	explicitely	explicitly
"	下から1行目	(i, j=0, 1, 2, 3)	(i, j=0, 1, 2, 3)
208	上から10行目	$-\overset{*}{C}{}^{iv\sigma}{}_{\mu} \overset{*}{g}{}^{i\mu}$	$-\overset{*}{C}{}^{j\nu\sigma}{}_{\mu} \overset{*}{g}{}^{i\mu}$
"	上から17行目	$\overset{*}{G}{}^{iij\mu\nu} = 0$	$\overset{*}{G}{}^{ij\mu\nu} = 0$
"	上から21行目	Discusson	Discussion
211	下から17行目	electrode	electrode
"	下から7行目	Inor der	In order
213~217	見出し	SUGANVMA	SUGANUMA
215	下から1行目	craked	cracked
216	下から14行目	NO ₃ -	NO ₃ ⁻